29/10/2020

Την προηγούμενη φορά δείξαμε ότι η εξ. Laplace $\Delta u = 0$ στον $\mathbb{R}^n$ έχει ακτινικές λύσεις οι οποίες (αναγκαία και ικανά) έχουν την μορφή

$$u(x) = v(|x|) = \begin{cases} b \ln|x| + c, & n=2 \\ \dfrac{b}{|x|^{n-2}} + c, & n \geq 3 \end{cases}$$

(Επιλέγοντας για λόγους κανονικοποίησης $c=0$ και b ως ακολούθως τη θεμελιώδη λύση $\Phi(x) \left[= \tilde{\Phi}(|x|)\right] =$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln|x|, & n=2 \\ \dfrac{1}{n(n-2)\,\alpha(n)} \cdot \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} \quad x \neq 0$$

(με $\alpha(n)$ = όγκος μον. μπάλας στον $\mathbb{R}^n$).

<u>Παρατήρηση</u>: Για $x \to 0 \Rightarrow \Phi(x) \to +\infty$

δηλ. έχουμε singularity (ανωμαλία, ιδιάζουσα κατάσταση)

Με την βοήθεια της θεμελιώδους λύσης θα λύσουμε την εξίσωση Poisson στον $\mathbb{R}^n$ και μάλιστα δίνοντας τύπο επίλυσης. Συγκεκριμένα: <u>Θεώρημα 1</u> (Evans, σελ. 23)

Έστω $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Τότε η συνέλιξη

$$u(x) = (\Phi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy \quad \text{είναι}$$

κλασική λύση με $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ της εξ. Poisson στον $\mathbb{R}^n$: $-\Delta u = f$ στον $\mathbb{R}^n$

<u>Γλωσσάριο</u> : $u \in C_c^k(\mathbb{R}^n) \iff$

$u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ (δηλ. k φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δηλ. $\exists$ όλες οι μερ. παρ. $D^a \doteq$

$\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}$, με $\underbrace{|a|}_{= a_1 + \dots + a_n,\ a_i \in \mathbb{N}_0} \leq k$,

και είναι συνεχείς) και η u έχει συμπαγή φορέα, δηλ.

$\underline{\text{supp}\, u} := \overline{\{ x \in \mathbb{R}^n : u(x) \neq 0 \}}$ (← κλειστή θήκη)

=: φορέας του u

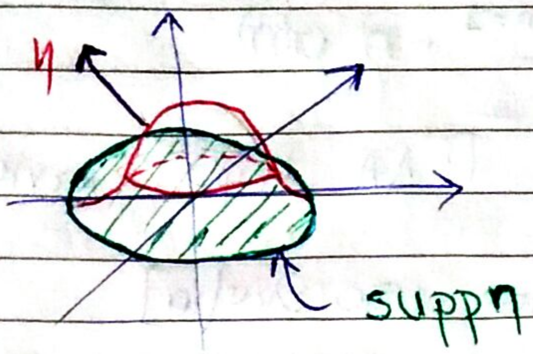
είναι (φραγμένο και άρα) συμπαγές.

<u>Σημαντικό παράδειγμα</u> : ο εκλειαντής (mollifier) : $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ με

$$\eta(x) \left[= \tilde{\eta}(|x|) \right] = c \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} , & |x| < 1 \\ 0 , & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

όπου $c > 0$, τέτοιο ώστε (κανονικοποίηση)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta := \int_{\mathbb{R}} \eta(x)\, dx \left[= \|\eta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right] = 1$$



Ισχύει : $\operatorname{supp}\eta = \bar{B}(0,1)$ [= κλειστή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$] (Evans : $B(0,1)$!)

Άσκηση: 1) μελέτη Appendix A. Evans και απόδειξη ότι $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

2) Δείξτε ότι $u \in C^k(\bar{U}) \Rightarrow D^\alpha u$ επεκτείνεται συνεχώς στο $\bar{U}$

Κάποια συμπεράσματα που θα χρειαστούμε:

1) $$|\bar{B}(0,r)| = \int_{\bar{B}(0,r)} 1\,dx = r^n \int_{\bar{B}(0,1)} 1\,dx =$$

$$r^n \underbrace{|B(0,1)|}_{:=\alpha(n)}$$

$$\left[= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right]$$

για την κλειστή μπάλα $\bar{B}(0,r)$, $r>0$, στον $\mathbb{R}^n$ [Άσκηση: κανόνας αλλαγής μεταβλητής]

$$|\partial B(0,r)| := \int_{\partial B(0,r)} 1\,ds =$$ ← εμβαδόν της $(n-1)$-διάστατης σφαίρας στον $\mathbb{R}^n$

$= r^{n-1} |\partial B(0,1)| = r^{n-1} \cdot n \cdot \alpha(n)$

[Άσκηση για $n=3$: ΠΓΔΑ, Κεφ 4, γενικώς με το ακόλουθο χρήσιμο αποτέλεσμα]

2) Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και M ένα $(k-1)$ - διάστατο λείο πολύπτυγμα στον $\mathbb{R}^n$ (για $k=n$: υπερεπιφάνεια, $k=n=3$: επιφάνεια) και

$f : x + rM \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη

(π.χ. συνεχής, έτσι ώστε να $\exists$ το ολοκλήρωμα). Τότε ισχύει ο εξής K.A.M. για πολύπτυγματα:

$$\int_{x_0+rM} f(x)\, dS(x) = r^k \int_M f(x_0 + ry) \cdot dS(y)$$

(χωρίς απόδειξη, εδώ)

3) « Μέθοδος Κρεμμυδιού » Evans, Theorem 4, σελ 712.

(i) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow \exists$ το ολοκλήρωμα $\in \mathbb{R}$ και συνεχής.

Τότε $\left[\int_{\mathbb{R}^n} f :=\right] \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx =$

$$\int_0^{\infty} \int_{\partial B(x_0, r)} f(x) \cdot dS(x)\, dr$$

και αντίστοιχα για $f: \underbrace{B(x_0, R)}_{\subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$,

$(R>0)$, ολοκληρώσιμη και συνεχής

$$\int_{B(0,R)} f(x) \cdot dx = \int_0^R \left(\int_{\partial B(x_0, r)} f(x)\, dS(x) \right) dr$$

(ουσιαστικά Θ. Fubini)

ii) $\frac{d}{dr}\left(\int_{B(x_0, r)} f(x) dx \right) =$

$\int_{\partial B(x_0, r)} f(x) dS(x)$ [(i) και (ii) χωρίς απόδειξη]

Άσκηση: [Δ.ο.: $|B(0,r)| = r^n \cdot \underbrace{|B(0,1)|}_{=a(n)}$, $|\partial B(0,r)| = r^{n-1} \cdot n \cdot a(n)$]

($\partial B(0,r) = (n-1)$-διάστατη σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$
$= (n-1)$-διάστατο (υπο)πολύπτυγμα στον $\mathbb{R}^n$
$= (n-1)$-διάστατη υπερεπιφάνεια στον $\mathbb{R}^n$)

Βρείτε για ποια $a > 0$, υπάρχει το

$$\int_{B(0,r)} \frac{1}{|x|^a} dx < \infty, \text{ για } B(0,r) \subset \mathbb{R}^n \quad (r > 0)$$

Βρείτε για ποια $\beta > 0$, $\exists$ το

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\beta/2}} dx < \infty$$

Απόδειξη Θεωρήματος 1.

1) $\exists \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy < \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

n=2 : [n=3 Άσκηση]

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \ln|x-y| \cdot \underbrace{f(y)}_{\in C^2_c(\mathbb{R}^n)} dy =$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ τυχαίο, αλλά σταθερό

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \leq 1} \ln|x-y| f(y)\, dy - \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \geq 1} \ln|x-y| f(y)\, dy$$

$$=: I_1 + I_2 ,$$

Το $I_2 \in \mathbb{R}$ αφού [επειδή το f έχει συμπαγή φορέα]

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \geq 1} \ln|x-y| f(y)\, dy$$

$$\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \geq 1 , y \in \underbrace{\operatorname{supp} f}_{\subset B(x,R)}\}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |x-y| \leq R \}$$

και η συνάρτηση

$\ln|x - \cdot| : \bar{B}(0,R) \setminus B(0,1) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής [ολοκληρώσιμα συνεχούς συνάρτησης πάνω από συμπαγές (J-μετρήσιμο) είναι υπάρχει].

Το $I_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_{|x-y|\le 1} \ln|x-y|\, f(y)\,dy \in \mathbb{R}$:

Επειδή και οι δύο συναρτήσεις του y είναι συνεχείς (στο $B(x,1)\setminus\{x\}$) και [άρα μετρήσιμες στο $B(x,1)$]. αρκεί νδο.:

$$|-2\pi I_1| = \left|\int_{|x-y|\le 1} \ln|x-y|\, f(y)\,dy\right| \underset{\text{καν. ολοκλ.}}{\le}$$

$$\int_{|x-y|\le 1} |\ln|x-y||\cdot \underbrace{|f(y)|}\,dy \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{|x-y|\le 1} |\ln|x-y||\,dy$$

$\in C^2_c(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$ συν. επί συμπαγούς $\Rightarrow$ λαμβάνει max, το $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$

$$= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,1)} |\ln|y||\,dy$$

και $\int_{B(0,1)} |\ln|y||\,dy = -\int_{B(0,1)} \ln|y|\,dy$

$$= -\int_0^1 \int_{\partial B(0,r)} \ln|y|\,dS(y)\,dr =$$

$|y| = r$, για $y\in\partial B(0,r)$

$$= -\int_0^1 \ln r \int_{\partial B(0,r)} 1 \, dS(y) \, dr =$$

$$- \int_0^1 \ln r \underbrace{|\partial B(0,r)|}_{\substack{= n \cdot r^{n-1} \cdot a(n) \\ \underset{(n=2)}{=} 2\pi r}} dr$$

$$= -2\pi \int_0^1 r \ln r \, dr \in \mathbb{R}$$

Άσκηση

[$n \geq 3$: Άσκηση]

Άρα, δείξαμε ότι το $u(x)$ ∃ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Είδαμε, ότι το ολοκλήρωμα $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, αν $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, παρόλο που η Φ απειρίζεται για $y \to x$ (δηλ. έχουμε singularity)

Αυτό συμβαίνει επειδή η τάξη της ανωμαλίας αυτής είναι αρκετά μικρή (δηλ. το πόσο γρήγορα $\Phi(x-y) \to \infty$ για $y \to x$ το ελέγχουμε στην αντίστοιχη διάσταση n αρκετά ώστε να «εξισορροτιέται >> η ανωμαλία αυτή : βλ.

για ποια $a>0$ $\exists \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^a} dx < \infty$)

Ουσιαστικά αυτό αποδεικνύεται για συνεχείς (=) μετρήσιμες συναρτήσεις μέσω εκτίμησης (estimate) της απολ. τιμής προς τα πάνω.

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) f(y) dy\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x-y)| \cdot |f(y)| dy < \infty$$

1) [αποδ θεωρ. 1] θνδο : $u \in C^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$

μερικές παράγωγοι

$\exists D^a u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις για $|a| \leq 2$

a) $|a| = 0$:

θνδο : $v \in C(\mathbb{R}^n)$

για $v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(x-y) dy \left[\underset{\substack{ΑΣΦ.\\ΚΑΜ}}{=} \right.$

$\left. \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) f(y) dy \right]$

όπου $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ και ϕ η θεμελιώδης λύση της εξ. Laplace.

$\to \exists R > 0 : \operatorname{supp} f \subset B(0,R)$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τυχαίο, αλλά σταθερό. θνδο: v είναι συνεχής στο x_0. Αρκεί νδο

$|v(x) - v(x_0)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$

$$|v(x) - v(x_0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) f(x_0-y)\,dy \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \left(f(x-y) - f(x_0-y) \right) dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)| \cdot |f(x-y) - f(x_0-y)|\,dy =: I_1$$

Αν $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$, $R>0$, τότε για $x \in B(x_0,1)$ έχουμε $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(x_0, R+1)$

$\iff |x_0 - y| > R+1 > R$ και

$|x-y| \geq |x_0 - y| - |x - x_0| \geq |x_0 - y| - 1 >$

$R+1-1 = R$

$\implies f(x-y) = 0$, $f(x_0-y) = 0$

Συνεπώς, $\forall x \in B(x_0,1)$ έχουμε

$$I_1 = \int_{B(x_0,R+1)} |\phi(y)| \cdot |f(x-y) - f(x_0-y)|\,dy$$